Équations du troisième degré

Z, auctore www.mathforu.com

30 septembre 2005

1 Introduction

Soit l'équation

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0, \tag{1}$$

dont on cherche toutes les solutions réelles. On pose

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10.$$

Le problème consiste à trouver toutes les racines, s'il en existe, du polynôme P, qui est du troisième degré. La première des choses à faire est de procéder à des essais numériques : c'est la recherche de *racines évidentes*. Il est notoire que les racines en nombres entiers d'une équation unitaire sont à chercher parmi les diviseurs du terme constant, ici 10. Il est donc inutile de tester des valeurs comme 3 ou 4, puisque les seules possibilités en nombres entiers sont

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 5 \text{ et } \pm 10.$$

On constate en substituant, que l'on a seulement

$$P(1) = P(-2) = P(5) = 0.$$

Les nombres 1, -2 et 5 sont donc des racines de P c'est-à-dire des solutions de l'équation $P(x) = 0$. Le théorème de factorisation[1] des polynômes montre que l'on a

$$\boxed{P(x) = (x-1)(x+2)(x-5).}$$

Donc la liste de *toutes* les solutions de l'équation $P(x) = 0$ est

$$\{-2\,;\,1\,;\,5\}.$$

[1] un nombre u est racine d'un polynôme f si et seulement si

$$f(x) = (x-u)g(x),$$

où g est un autre polynôme.

Soit l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0, \tag{2}$$

dont on cherche toutes les solutions. Pour cela, on pose

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4.$$

Les racines évidentes, s'il en existe, sont à chercher parmi les diviseurs de 4, c'est-à-dire

$$\pm 1,\ \pm 2 \text{ et } \pm 4.$$

On constate que seulement $Q(4) = 0$, donc $Q(x)$ peut être factorisé par $(x-4)$. Il s'agit donc de trouver des nombres p et q tels que

$$Q(x) = (x-4)(x^2 + px + q).$$

En développant ce produit, on obtient

$$Q(x) = x^3 + (p-4)x^2 + (q-4p)x - 4q.$$

Alors, puisque l'on doit avoir l'identité

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = x^3 + (p-4)x^2 + (q-4p)x - 4q,$$

on est conduit à poser $-4q = -4$ et $p-4 = -6$, soit $q = -1$ et $p = -2$. Il reste à vérifier que cette *identification des coefficients* est valable : en développant, on constate que l'on a bien

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = (x-4)(x^2 - 2x - 1).$$

Pour trouver les autres solutions, s'il y en a, il suffit de résoudre l'équation

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

en vertu du principe du produit-nul (classe de 3$^{\text{e}}$). On a

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times -1 = 8,$$

d'où les racines de $x^2 - 2x - 1$, ce sont

$$x' = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x'' = 1 - \sqrt{2}.$$

La liste de toutes les solutions de l'équations $Q(x) = 0$ est donc

$$\{1-\sqrt{2}\,;\, 1+\sqrt{2}\,;\, 4\},$$

et on a la factorisation

$$\boxed{Q(x) = (x-4)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})}$$

Soit l'équation

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0, \tag{3}$$

dont on cherche toutes les solutions. On pose

$$R(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6.$$

Une racine évidente de R est à chercher parmi les nombres

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3 \text{ et } \pm 6.$$

On constate que seulement $R(-3) = 0$. Donc le polynôme R est factorisable par $(x+3)$ et on doit trouver m et n tels que

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x+3)(x^2 + mx + n).$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient $m = -2$ et $n = 2$. On vérifie que l'on a bien l'identité

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x+3)(x^2 - 2x + 2).$$

Or, pour résoudre $x^2 - 2x + 2 = 0$, on obtient un discriminant négatif

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4.$$

Ceci montre que le polynôme $x^2 - 2x + 2$ ne possède pas de racine et donc le polynôme R ne peut pas avoir d'autre racine que la valeur -3.
En conclusion, l'équation (3) possède une unique solution égale à -3 et on a la factorisation maximale

$$\boxed{x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x+3)(x^2 - 2x + 2)}$$

2 Formule de Cardan

Au XVIe siècle, des algébristes italiens ont découvert une méthode pour calculer *une* racine d'un polynôme de degré 3 donné sous la forme *réduite*

$$x^3 + p\,x + q = 0, \tag{4}$$

où p et q sont des paramètres quelconques. La propriété (triviale) suivante est un lemme nécessaire à cette résolution.

Propriété 1 *Pour tous nombres u et v, on a*

$$(u+v)^3 - 3\,u\,v(u+v) - (u^3 + v^3) = 0. \tag{5}$$

La preuve résulte du développement remarquable bien connu

$$(u+v)^3 = u^3 + 3\,u^2 v + 3\,u\,v^2 + v^3$$

que l'on ré-arrange sous la forme attendue.

L'observation de la relation (5), **semblable à la forme réduite** (4) montre qu'il est sans doute pertinent de faire le changement de variable

$$x = u + v. \tag{6}$$

Alors l'identification des coefficients dans

$$x^3 + p\,x + q = (u+v)^3 - 3\,u\,v(u+v) - (u^3+v^3)$$

conduit à poser

$$p = -3\,u\,v \quad \text{et} \quad q = -(u^3+v^3),$$

c'est-à-dire

$$u\,v = -\frac{p}{3} \quad \text{et} \quad u^3+v^3 = -q.$$

Pour une question d'homogénéité, on écrit plutôt

$$u^3 v^3 = \frac{-p^3}{27} \quad \text{et} \quad u^3+v^3 = -q. \tag{7}$$

Pour y voir plus clair, posons

$$a = u^3 \qquad \text{et} \qquad b = v^3.$$

Alors les conditions (7) s'écrivent

$$a\,b = \frac{-p^3}{27} \quad \text{et} \quad a+b = -q. \tag{8}$$

Autrement dit, il s'agit de trouver deux nombres a et b connaissant leur somme $S = -q$ et leur produit $P = -p^3/27$. On sait que ceci n'est possible[2] que sous la condition

$$S^2 - 4P \geq 0, \quad \text{c'est-à-dire, ici} \quad q^2 + \frac{4\,p^3}{27} \geq 0$$

[2]On rappelle que a et b sont solutions, si elles existent, de l'équation $X^2 - S\,x + P = 0$, dont le discriminant est

$$\Delta = S^2 - 4\,P.$$

ce qui s'écrit finalement
$$4\,p^3 + 27\,q^2 \geq 0. \tag{9}$$
Dans **ce** cas, les nombres a et b sont les solutions de l'équation
$$X^2 + q\,X - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{10}$$
Les solutions de cette équation sont données par
$$X = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4\,p^3}{27}}}{2}$$
donc on a par exemple
$$a = \frac{-q - \sqrt{\frac{27\,q^2+4\,p^3}{27}}}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-q + \sqrt{\frac{27\,q^2+4\,p^3}{27}}}{2}.$$
Puisque $a = u^3$ et $b = v^3$, et puisque $x = u + v$, on en déduit que le nombre donné par
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27\,q^2 + 4\,p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27\,q^2 + 4\,p^3}{27}}} \tag{11}$$
est une solution de l'équation (4). Cette expression est connue sous le nom de **formule de Cardan** – ce nom lui est resté attaché bien que Cardan n'en soit pas le découvreur[3]...
Cette expression d'une solution particulière est à l'évidence peu maniable !

On peut malgré tout énoncer le résultat suivant.

Théorème 1 *Pour une équation cubique sous la forme réduite*
$$x^3 + p\,x + q = 0,$$
si l'on a $4\,p^3 + 27\,q^2 \geq 0$*, alors une solution particulière est donnée par*
$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4\,p^3+27\,q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4\,p^3+27\,q^2}{27}}}}$$

[3]Pour autant que je sache, c'est d'abord Scipio del Ferro qui l'a trouvée dans des cas particuliers, puis Niccolo Tartaglia l'a re-découverte. Cardan a eu le mérite de la faire connaître, à une époque où les découvertes scientifiques restaient généralement secrètes.

Cette formule permet de calculer une solution de l'équation, dans le cas où il n'y a pas de racine évidente. Par exemple, aucun des diviseurs ± 1, ± 2 du terme constant de l'équation

$$x^3 + 3\,x + 2 = 0 \tag{12}$$

n'en étant pas solution, on calcule

$$4\,p^3 + 27\,q^2 = 4 \times 27 + 27 \times 4 = 216$$

d'où la solution particulière

$$x = \sqrt[3]{-1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{-1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{216}{27}}} \simeq -0,59607\ldots$$

Voici d'autres équations, sans racine évidente, que l'on peut « résoudre » à l'aide de cette formule

$$\begin{aligned} x^3 + 3\,x + 3 &= 0 && (13)\\ x^3 + 3\,x + 4 &= 0 && (14)\\ x^3 + 3\,x + 5 &= 0. && (15) \end{aligned}$$

Les coefficients sont ici choisis pour obtenir une racine carrée *commode* dans la formule de Cardan.

Lorsque l'équation n'est pas donnée sous la forme réduite, on est en présence d'une équation cubique sous forme générale

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0. \tag{16}$$

On peut toujours la ramener à une équation sous la forme réduite, en commençant par diviser par a, ce qui donne

$$x^3 + \beta\,x^2 + \gamma\,x + \delta = 0$$

puis on peut supprimer le *terme carré* au moyen de la transformation de **Tchirnhaus**, en posant

$$x = X - \frac{\beta}{3} \tag{17}$$

En effet, on a d'une part

$$\left(X - \frac{\beta}{3}\right)^3 = X^3 - 3\,\frac{\beta}{3}\,X^2 + \cdots = X^3 - \beta\,X^2 + \cdots$$

et d'autre part

$$\beta\left(X - \frac{\beta}{3}\right)^2 = \beta\,X^2 + \cdots$$

ce qui montre que ce changement de variable élimine le terme en X^2.

3 Extension au cas « irréductible »

On a vu que la formule de Cardan permet de trouver une solution d'une équation sous forme réduite

$$x^3 + p\,x + q = 0$$

dans le cas où

$$4\,p^3 + 27\,q^2 \geq 0.$$

Bombelli a étudié l'équation

$$x^3 - 15\,x - 4 = 0 \tag{18}$$

qui possède une *racine évidente*, égale à 4, puisque l'on a

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0.$$

On a ainsi la factorisation

$$x^3 - 15\,x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4\,x + 1)$$

où le trinôme $x^2 + 4\,x + 1$ a deux racines conjuguées données par

$$x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Or, en menant les calculs comme précédemment, avec

$$4 \times (-15)^3 + 27 \times (-4)^2 = -13068 < 0,$$

et en appliquant *malgré tout* la formule de Cardan, on obtient

$$x = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-13608}{27}}} + \sqrt[3]{2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-13068}{27}}}$$

où figurent des **racines carrées de nombres négatifs**... mais en continuant comme si de rien n'était, on obtient

$$x = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{2}\sqrt{-484}} + \sqrt[3]{2 + \frac{1}{2}\sqrt{-484}}$$

ou bien encore

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

que l'on peut même[4] aller jusqu'à écrire

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Par un moyen qui lui est propre, Bombelli s'est aperçu que

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1},$$

ce dont on peut constater la justesse en calculant leurs cubes...

Ainsi, Bombelli a pu montrer que dans ce cas, en passant outre la question des racines carrées de nombres négatifs, la formule de Cardan, qui s'écrit

$$x = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4,$$

donne encore une racine de l'équation du 3e degré.

C'est à la suite de calculs de ce genre que les *nombres complexes* ont fait leur apparition, en acceptant l'existence de règles de calcul concernant le nombre imaginaire

$$i = \sqrt{-1}.$$

En application de la formule de Cardan, on peut toujours essayer de résoudre cette équation

$$x^3 - 18\,x + 35 = 0 \tag{19}$$

sans passer par les racines évidentes. Ou bien encore celle ci-dessous, qui figurait parmi les questions auxquelles Einstein, âgé de 17 ans, a dû répondre à l'occasion de l'épreuve d'algèbre de son baccalauréat passé en 1896

$$x^3 - 14\,x - 12 = 0. \tag{20}$$

[4] Bien entendu, l'élève de Première ne s'amusera pas à ce genre de chose - il attendra d'être en Terminale pour cela !