- **تمرين01:**

**1)-** حدد الأساس $r$ و الحد الأول $u_0$ لمتتالية حسابية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إذا علمت أن :

$u_0+u_1+...+u_5=-3$ و $u_7+u_8+...+u_{12}=-129$ .

**2)-** حدد نهاية المتتالية العددية $(x_n)$ في كل حالة من الحالات التالية :

$(1): x_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^{2n}$ و $(2): x_n=\dfrac{4^n-\pi^n}{3^n-\pi^n}$ و $(3): x_n=\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$ و $(4): x_n=\dfrac{2.n^{\frac{3}{2}}+3^n}{n^{\frac{7}{2}}+4^n}$ .

**3)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}/n\geq 7: n!>3^n$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $\left(\dfrac{n!}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ .

- **تمرين02:**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n=\dfrac{C_{2n}^{n}}{4^n}$ .

**1)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}u_n$ ، ثم أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ .

**2)-** إستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة نهايتها موجبة .

**3)-** بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ، ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ .

- **تمرين03:**

نعتبر المتتالية العددية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث : $x_0=-1$ ، $x_1=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}: x_{n+2}=x_{n+1}-\dfrac{1}{4}x_n$ .

و لكل $n$ من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n=2^n x_n$ و $v_n=x_{n+1}-\dfrac{1}{2}x_n$ .

**1)-** بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول $v_0$ ، ثم عبر عن $v_n$ بدلالة $n$ .

**2)-** بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول $u_0$ .

**3)-** عبر عن $u_n$ ثم $x_n$ بدلالة $n$ ، ثم بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}/n\geq 2: \left(\dfrac{3}{2}\right)^n\geq n$ .

**4)-** حدد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2^n}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

- **تمرين04:**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث : $u_0=1$ ، $u_1=2$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$

و لكل $n$ من $\mathbb{N}$ نضع : $v_n=u_{n+1}-u_n$ .

**1)-** بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول $v_0$ ثم عبر عن $v_n$ بدلالة $n$ .

**2)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n=u_0+\sum_{k=0}^{n-1}v_k$ ، ثم عبر عن $u_n$ بدلالة $n$ و إستنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

- **تمرين05:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=2u_{n+1}+2n+3$ .

و لكل $n$ من $\mathbb{N}$ نضع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ .

**1)-** بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي $b$ تكون من أجله المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدها العام $v_n=u_n+bn-1$ متتالية هندسية ينبغي تحديد أساسها و حدها الأول $v_0$ .

2)- إستنتج تعبيرا للحد العام $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$ مهما يكن $n$ من $\mathbb{N}$ .

3)- عبر عن المجموع $S_n$ بدلالة $n$ مهما يكن $n$ من $\mathbb{N}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $\left(\frac{S_n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ .

- **تمرين06:**

1)- أدرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و حدد نهايتها إذا علمت أن $(1+u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(3-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان متحاديتان .

2)- لكل $n$ من $\mathbb{N}$ نضع : $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ حيث $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية حدودها موجبة . حدد قيمة حقيقية كل عبارة من العبارات التالية و علل جوابك :

$(1): \forall n\in\mathbb{N}: 0\le b_n \le 1$ و $(2):$ متقاربة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow$ متقاربة $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(3):$ تزايدية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow$ تزايدية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(4):$ متقاربة $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow$ متقاربة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

- **تمرين07:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بحيث :

$a_1<0$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}=\frac{a_n}{n}$ ، $b_1>0$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*: b_{n+1}=\frac{b_n}{n}$ .

1)- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<0<b_n$ و أن المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبتين .

2)- بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*: b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{(n-1)!}$ ثم إستنتج أن المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاديتان و حدد نهايتهما .

- **تمرين08:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$u_0=3$ و لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $v_n=\frac{7}{u_n}$ و $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ .

1)- بين أن حدود المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة قطعا و أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n-v_n=\frac{1}{4u_n}(u_{n-1}-v_{n-1})^2$

ثم إستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n-v_n\ge 0$ .

2)- بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتين و أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n\ge\frac{21}{8}$ .

3)- إستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n-v_n\le\frac{1}{10}(u_{n-1}-v_{n-1})^2$ ، ثم بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}: 0\le u_n-v_n\le\frac{1}{10^{2^n-1}}$ .

4)- أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان و حدد نهايتهما .

- **تمرين09:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$u_0=2$ ، $v_0=-1$ و لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ و $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}$ .

1)- لكل $n$ من $\mathbb{N}$ نضع : $x_n=u_n-v_n$ .

أ- بين أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية و حدد أساسها $q$ و حدها الأول $x_0$ ، ثم عبر عن الحد العام $x_n$ بدلالة $n$ .

ب- بين أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية و المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .

3)- لكل $n$ من $\mathbb{N}$ نضع : $y_n=u_n+2v_n$ .

بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}: y_n=0$ ، ثم إستنتج $u_n$ و $v_n$ بدلالة $n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .

**4)-** حدد نهايتي المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**5)-** أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ ، ثم حدد النهاية : $\lim_{n\to+\infty}S_n$ .

- **تمرين10:**

لكل $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$ بحيث $0<a<b$ نعتبر المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث : $a_0=a$ و $b_0=b$

و لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ و $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ و $\alpha_n=b_n-a_n$ .

**1)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:0\le\alpha_{n+1}\le\frac{1}{2}\alpha_n$ ، ثم إستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}:0\le\alpha_n\le\frac{b-a}{2^n}$ .

**2)-** بين أن المتتاليتان $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان .

**3)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:a_nb_n=ab$ ، ثم حدد نهايتي المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

- **تمرين11:**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

و المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n);n\ge0\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=2\\v_{n+1}=f(v_n);n\ge0\end{cases}$ .

**1)-** بين أن الدالة $f$ متصلة على المجال $I=[1,2]$ و أن : $f(I)\subseteq I$ .

**2)-** بين أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset I$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset I$ و أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

**3)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(1+v_n)(1+u_n)}$ ، ثم إستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}:\begin{cases}v_n-u_n\ge0\\v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)\end{cases}$ .

**4)-** بين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}:v_n-u_n\le\frac{1}{4^n}$ ، ثم إستنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان و حدد نهايتهما .

- **تمرين12:**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث : $u_0=-\frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=-1+\frac{1+u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ .

**1)-** بين أن الدالة $f:x\mapsto-1+\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$ متصلة على المجال $I=]-1,0[$ و أن $f(I)\subseteq I$ .

**2)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\in I$ و أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة قطعا .

**3)-** إستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

- **تمرين13:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=\sqrt{2-u_n}$ .

**1)-** أنشىء في معلم متعامد و ممنظم منحنى الدالة : $f:x\mapsto\sqrt{2-x}$ ، ثم أول هندسيا المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**2)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:0\le u_n\le\sqrt{2}$ ، ثم إستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}:|u_{n+1}-1|\le\frac{|u_n-1|}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ .

**3)-** بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*:|u_n-1|\le\frac{\sqrt{2}-1}{\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{n-1}}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .