الأعداد المركبة

تمهيد :

. المعادلة $x+5=0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{N}$ و لكن حلها (-5) موجود في $\mathbb{Z}$.

. المعادلة $2x-3=0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$ و لكن حلها $\frac{3}{2}$ موجود في $\mathbb{Q}$.

. المعادلة $x^2=2$ لا تقبل حلول في $\mathbb{Q}$ و لكن حلولها $(-\sqrt{2})$; $\sqrt{2}$ موجودة في $\mathbb{R}$.

. المعادلة $x^2=-1$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ و لكن ستقبل حلين متمايزين $(-i)$; i في مجموعة جديدة $\mathbb{C}$ التي تكون موضوع دراستنا .

I . الشكل الجبري لعدد مركب :

مبرهنة

توجد مجموعة ، نرمز إليها بالرمز $\mathbb{C}$ و تحقق :

- $\mathbb{C}$ تشمل $\mathbb{R}$ أي $(\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$
- $\mathbb{C}$ مزودة بالجمع و الضرب التي لها نفس قواعد الحساب في $\mathbb{R}$
- يوجد عنصرا i من $\mathbb{C}$ حيث : $i^2 = -1$
- كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$z = a + i\,b$ حيث a و b أعداد حقيقية .

تعاريف:

- المجموعة $\mathbb{C}$ هي مجموعة الأعداد المركبة
- عنصراَ z من $\mathbb{C}$ هو عدداَ مركباَ
- الكتابة $z = a + i\,b$ تدعى الشكل الجبري للعدد z .
- $z = a + i\,b$ عدد مركب :

a هو الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز بالرمز $Re(z)$

b هو الجزء التخيلي للعدد z و يرمز بالرمز $Im(z)$

- إذا كان $b = Im(z) = 0$ تقول أن z حقيقي .
- إذا كان $a = Re(z) = 0$ تقول أن z تخيلي صرفاَ .

العدد المركب $0 = 0 + i\,0$ هو حقيقي و تخيلي صرفاَ في نفس الوقت .

نتائج وحدانية الكتابة : $z = a + i\,b$ حيث a و b حقيقيان

$a + i\,b = a' + i\,b'$ يكافئ $(a = a' \text{ et } b = b')$

$a + i\,b = 0$ يكافئ $(a = 0 \text{ et } b = 0)$

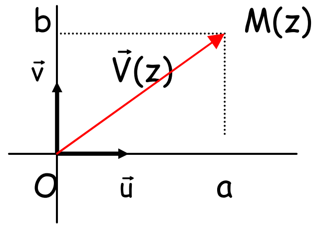
II. التمثيل الهندسي لعدد مركب:

المستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

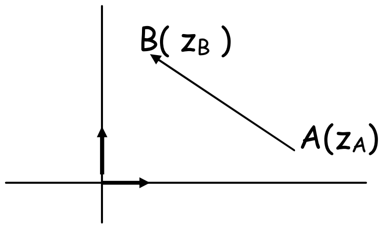
تعاريف:

نعتبر العدد المركب $z=a+ib$ حيث a و b حقيقيان

- النقطة $M(a\,;b)$ تسمى **صورة** العدد المركب z .و نكتب عادة $M(z)$.
- الشعاع $\vec{V}(a;b)$ يسمى أيضا صورة العدد المركب z .و نكتب عادة $\vec{V}(z)$.
- العدد المركب z يسمى **لاحقة** النقطة M و ايضا **لاحقة** الشعاع $\vec{V}$ و نكتب عادة : z_M أو $z_{\vec{V}}$



لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$



لاحقة $(\overrightarrow{AB})$ = لاحقة (B) - لاحقة (A)

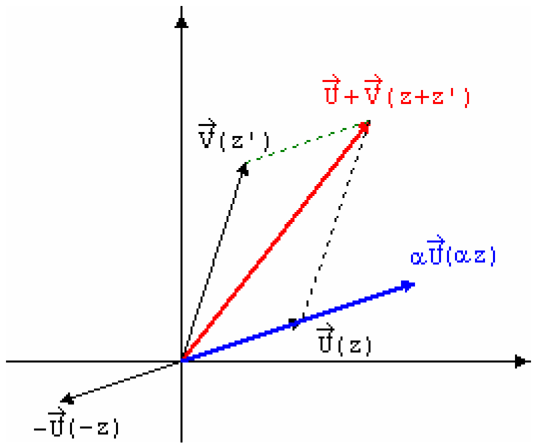
نكتب عادة : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

الخواص

لكل شعاعين $\vec{V}$ و $\vec{U}$ ولكل عدد حقيقي α لدينا:

$$z_{\vec{U}+\vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}}$$

$$z_{\alpha\vec{U}} = \alpha\, z_{\vec{U}}$$

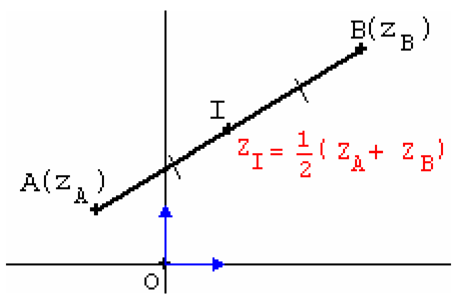


بالأخص : $z_{-\vec{U}} = -z_{\vec{U}}$

لاحقة منتصف قطعة مستقيمة

إذاكان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن :

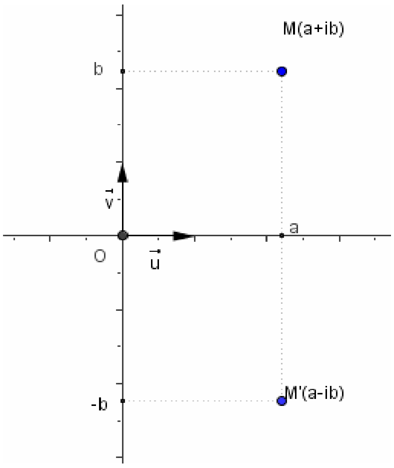
$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$



III. مرافق عدد مركب :

تعريف:

نسمي مرافق العدد المركب $z = a + i b$ العدد المركب الذي نر مز له بالرمز $\bar{z}$ و المعرف بـــ: $\bar{z} = a - i b$



التفسير الهندسي :

M و M' صور العددين المركبين $z = a + i b$ و $\bar{z} = a - i b$

النقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة للمحور الفواصل (يسمى عادة محور الأعداد الحقيقية)

ملاحظة :

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \quad \text{و} \quad z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z).$$

مبرهنة :

ليكن z عدد مركب.
▪ z حقيقي إذا وفقط إذا $z = \bar{z}$
▪ z تخيلي صرفاَ إذا وفقط إذا $z = -\bar{z}$

خواص:

لكل عددين مركبين z و z' :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ و $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$
- هذه النتائج تمدد لمجموع n حدود
- $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$

هذه النتائج تمدد لجداء n حدود

لكل عدد طبيعي n، $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

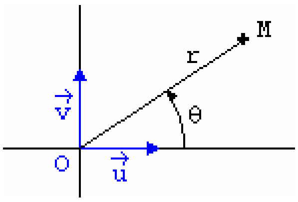
- إذا كان $z \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- إذا كان $z \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$
- إذا كان $z = a + i b$ فإن $\bar{z}z = a^2 + b^2$ إذن لـــ $z \neq 0$ لدينا :

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\,\frac{-b}{a^2 + b^2}$ هي الطريقة المستعملة لكتابة على الشكل الجبري عدد مركب حاصل قسمة .

IV.طويلة و عمدة عدد مركب غير معدوم :

تعريف:

ليكن z عدد مركب غير معدوم ، صورته M في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ و (r,θ)ثنائية إحداثيات قطبية في المستوي للنقطة M.



- العدد الحقيقي r يسمى طويلة العدد المركب z يرمز بالرمز $|z|$
- العدد الحقيقي θ يسمى عمدة العدد المركب z يرمز بالرمز arg(z).

لدينا إذن:

$$|z| = r = OM$$

$$\arg(z) = \theta = (\vec{u}, \vec{OM}) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

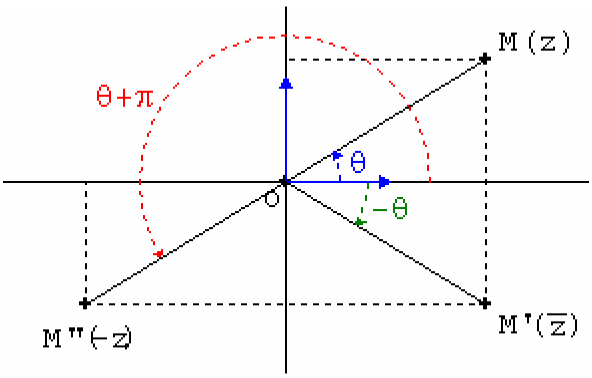
ملاحظات : العدد 0 طويلته 0 ولكن ليس له عمدة

- لكل عدد مركب z غير معدوم له عدد غير منتهي من عمد.إذا كان θ هي أحد العمد فإن العمد الأخرى للعدد z هي من الشكل $\theta+2k\pi$, نكتب عندئذ :

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

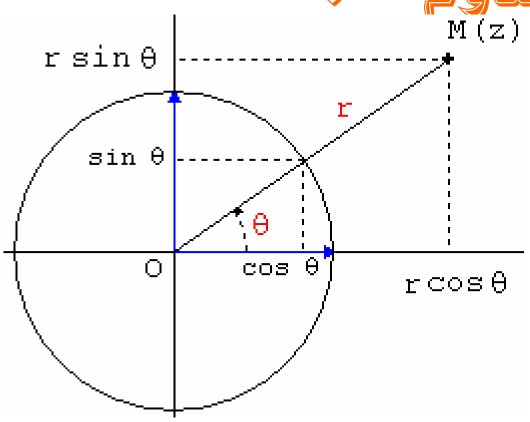
نتائج :

- إذا كان $z = a + ib$ فإن $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- طويلة كل عدد حقيقي x هي قيمته المطلقة $|x|$
- z حقيقي غير معدوم يكافئ ($\arg(z)=k\pi \ , K \in \mathbb{Z}$)
- z تخيلي صرفاَ غير معدوم يكافئ ($\arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi \ , \ k\in \mathbb{Z}$)
- z حقيقي غير معدوم لدينا:



$$\boxed{\begin{array}{l} \arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \\ \arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

V.الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :



مبرهنة:

ليكن $z = a + ib$ عدد مركب غير معدوم .

إذا كان : $|z| = r$ و $\arg(z) = \theta + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$

فإن : $a = r\cos\theta$ و $b = r\sin\theta$

تعريف:

ليكن z عدد مركب غير معدوم طويلته r وعمدة له θ.

الكتابة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد z.

المرور من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي و العكس:

الشكل الجبري		الشكل المثلثي
$z = a + ib$	$r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$ →	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
	← $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$	

تساوي عددين مركبين

z و z′ عددين مركبين غير معدومين

يكون z = z′ إذا و فقط إذا ($|z| = |z'|$; $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

مبرهنة

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ مع $r > 0$ فإن $|z| = r$ و $\arg(z) = \theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

VI. خواص الطويلة والعمد :

خواص الطويلة :

- لكل عددين مركبين z و z′ :
  - $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
  - $|-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |z|$
  - $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ أو $|z|^2 = z\bar{z}$
  - $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
  - $|zz'| = |z||z'|$
  - $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ و $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ ، $z \neq 0$.
  - $|z^n| = |z|^n$. $n \in \mathbb{N}$

خواص العمد :

z وz′ عددين مركبين غير معدومين

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$
- $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z) + 2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$

دستور موافر: *Formule de Moivre*

من أجل كل عدد حقيقي θ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

VII.الترميز الأسي لعدد مركب :

تعريف:

لكل عدد حقيقي θ نضع: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

بالتالي لكل عدد مركب z غير معدوم طويلته r وعمدة له θ الترميز الأسي لـــ z هو: $z = r\,e^{i\theta}$.

قواعد حساب بالترميز الأسي

r و r′ عددين حقيقيان موجبان تماماَ و θ و θ' عددين حقيقيان لدينا:

- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi)$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}$
- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\frac{r'e^{i\theta'}}{r\,e^{i\theta}} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}, \quad n\in\mathbb{N}$

صيغة أولير:

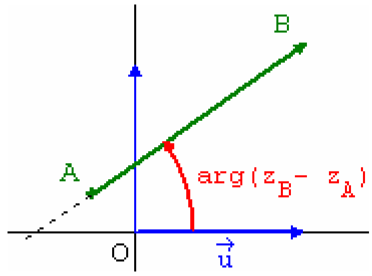
لكل عدد حقيقي θ

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$ و $$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

VII.المسافات و الزوايا الموجهة :

A و B نقطتين متمايزتان من المستوي

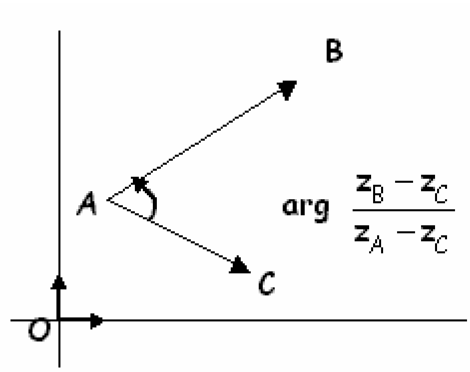
طول القطعة $[AB]$



$$AB = |z_B - z_A|$$

قيس الزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$:

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$



قيس الزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

A B ، C ثلاث نقاط متمايزة:

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

نتائج:

A ، B ، C ثلاث نقاط متمايزة:

- النقط A، B ، C هي على إستقامة واحدة إذا وفقط إذا : $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$
- المستقيمين (AC) و (CB) متعمدان إذا وفقط إذا: $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$