

القدرات المستهدفة

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح n نقطة ($2 \leq n \leq 4$).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

I - النقطة المتزنة

تعريف: لتكن A نقطة من المستوى (P) و α عدد حقيقي.

الزوج (A, α) يسمى نقطة متزنة. و نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل α أو العدد α وزن النقطة A .

II - مرجح نقطتين متزنتيننشاط رقم 1

A و B نقطتان مختلفتان.

(أوجد علاقة بين \overline{AG} و \overline{AB})

أ - أنشئ النقطة G بحيث $\overline{GA} - 2\overline{GB} = \vec{0}$.

هل يمكن إنشاء نقطة G بحيث $\overline{GA} - \overline{GB} = \vec{0}$ ؟ علل جوابك.

ب - لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى و α و β عددين حقيقيين.

حدد علاقة بين α و β لكي يتحقق وجود النقطة G بحيث $\alpha\overline{GA} + \beta\overline{GB} = \vec{0}$.

مبرهنة و تعريف:

لتكن (A, α) و (B, β) نقطتين متزنتين من المستوى (P) بحيث $\alpha + \beta \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى (P) بحيث $\alpha\overline{GA} + \beta\overline{GB} = \vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A, α) و (B, β) .

ملاحظة:

- G مرجح النقطتين (A, α) و (B, β) تحقق العلاقة $\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}$.

- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فإن (A, α) و (B, β) ليس لها مرجح.

تمارين تطبيقيةتمرين رقم 1:

حدد عددين حقيقيين α و β بحيث تكون النقطة G هي مرجح النقطتين المتزنتين (A, α) و (B, β) .

$$\overline{GA} + \overline{GB} = 3\overline{AB} \quad -1$$

$$2\overline{GA} + 3\overline{BA} = \vec{0} \quad -2$$

$$-3 \quad G \text{ ممثلة } A \text{ بالنسبة للنقطة } B.$$

تمرين رقم 2:

حدد موقع النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين (A, α) و (B, β) في الحالات التالية:

$$(A, 2) \text{ و } (B, 1) \quad -1$$

$$(A, -1) \text{ و } (B, 2) \quad -2$$

$$(A, -3) \text{ و } (B, -2) \quad -3$$

تمرين رقم 3:

أنشئ G مرجح النقطتين $(A, -2)$ و $(B, 3)$ و G' مرجح النقطتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$.

أكتب $\overline{GG'}$ بدلالة \overline{AB} .

نشاط رقم 2

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$ و G مرجح النقطتين المتزنتين (A, α) و (B, β) بحيث $\alpha + \beta \neq 0$.

بين أن G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A, k\alpha)$ و $(B, k\beta)$.

خاصية:

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب وزنيهما في عدد حقيقي غير منعدم.

تمرين تطبيقي

G مرجح النقطتين المتزنتين (A, α) و (B, β) بحيث $\alpha + \beta \neq 0$.

أوجد العددين الحقيقيين a و b بدلالة α و β بحيث يكون G مرجح النقطتين المتزنتين (A, a) و (B, b) و $a + b = 1$.

اعداد المستهدفة

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح n نقطة ($2 \leq n \leq 4$).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمت.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

نشاط رقم 3

لتكن M نقطة من المستوى .

بين أن مرجح النقطتين المترنتين (A, α) و (B, β) $\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$

مبرهنة:

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P) و α و β عددين حقيقيين بحيث $\alpha + \beta \neq 0$.

النقطة G هي مرجح النقطتين المترنتين (A, α) و (B, β) إذا و فقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى (P) : $(\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$

تمارين تطبيقية

تمرين رقم 1 :

- 1 - أنشئ الشكل. ABC مثلث و B' مرجح $(A, -2)$ و $(C, 1)$ و A' مرجح $(A, 2)$ و $(B, 3)$ و C' مرجح $(C, -1)$ و $(B, 3)$.

- 2 - بين أن لكل نقطة M من المستوى $-\overrightarrow{MA'} - \overrightarrow{MB'} + 2\overrightarrow{MC'} = \vec{0}$.
- 3 - أستنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين رقم 2 :

- 1 - أنشئ I مرجح $(A, 2)$ و $(C, 1)$ و J مرجح $(A, 1)$ و $(B, 2)$ و K مرجح $(B, -4)$ و $(C, 1)$.
- 2 - بين ان B مرجح $(K, 3)$ و $(C, 1)$.
- 3 - بين ان J منتصف القطعة $[KI]$.

تمرين رقم 3 :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P) .

- 1 - حدد مجموعة النقط M بحيث $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 0$.
- 2 - حدد مجموعة النقط M بحيث $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$.

تعريف:

مركز نقل نقطتين A و B هو مرجح هاتين النقطتين معينتين بمعاملين متساويين غير منعدمين .
 مركز نقل نقطتين A و B هو منتصف القطعة $[AB]$.
إحداثيات مرجح نقطتين :

نشاط رقم 4

ليكن G مرجح النقطتين المترنتين (A, α) و (B, β) .

- 1 - أكتب \overrightarrow{AG} بدلالة \overrightarrow{AB} .
- 2 - علما ان $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $G(x_G, y_G)$ أكتب x_G بدلالة كل من x_A و x_B و y_G بدلالة كل من y_A و y_B .

قاعدة :

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) لتكن النقط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $G(x_G, y_G)$.

إذا كان G هي مرجح النقطتين المترنتين (A, α) و (B, β) فإن : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$ و $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$

تمرين تطبيقي

المستوى (P) منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- لتكن النقط $A(1, 0)$ و $B(0, 3)$ و $C(3, 7)$ و $D(-1, 2)$.
- النقطة G مرجح $(A, 1)$ و $(C, 2)$ و G' مرجح $(B, 1)$ و $(D, 2)$.
- لتكن M و N و P منتصفات القطع $[AB]$ و $[CD]$ و $[GG']$ على التوالي.
- 1 - أحسب إحداثيات النقط G و G' و M و N و P .
- 2 - بين أن النقط M و N و P مستقيمية.

III - مرجح ثلاث نقط متزنة

نشاط رقم 5

A و B و C ثلاث نقط مختلفة .

- أ - أنشئ النقطة G بحيث $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- هل يمكن إنشاء نقطة G بحيث $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ؟ علل جوابك .

القدرات المستهدفة

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح n نقطة ($2 \leq n \leq 4$).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

ب- لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة من المستوى و α و β و δ أعداد حقيقية .
حدد علاقة بين α و β و δ لكي يتحقق وجود النقطة G بحيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \delta\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

مبرهنة و تعريف :

لتكن (A, α) و (B, β) و (C, δ) ثلاث نقط متزنة من المستوى (P) بحيث $\alpha + \beta + \delta \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى (P) بحيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \delta\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة (A, α) و (B, β) و (C, δ) .

ملاحظة :

G - مرجح النقط (A, α) و (B, β) و (C, δ) تحقق العلاقة $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{AB} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{AC}$.

- إذا كان $\alpha + \beta + \delta = 0$ فإن (A, α) و (B, β) و (C, δ) ليس لها مرجح.

تمرين تطبيقي

1 - حدد أعداد حقيقية α و β و δ بحيث يكون G مرجح النقط (A, α) و (B, β) و (C, δ) في الحالة التالية $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2 - أنشئ G مرجح النقط $(A, 2)$ و $(B, -1)$ و $(C, -2)$.

3 - النقطة D هي مرجح النقط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, -1)$ ، حدد طبيعة الرباعي $ACBD$.

نشاط رقم 6

لتكن M نقطة من المستوى .

بين أن G مرجح النقط المتزنة (A, α) و (B, β) و (C, δ) $\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \delta)\overrightarrow{MG}$.

مبرهنة:

لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة من المستوى (P) و α و β و δ أعداد حقيقية بحيث $\alpha + \beta + \delta \neq 0$.

النقطة G هي مرجح النقط المتزنة (A, α) و (B, β) و (C, δ) إذا و فقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى (P) :

$$(\alpha + \beta + \delta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC}$$

تمرين تطبيقي

1 - نعتبر النقط المختلفة A و B و C ،

و G مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 2)$ و $(B, -3)$ و H مرجح النقط المتزنة $(A, 2)$ و $(B, -3)$ و $(C, -1)$.

أ - أنشئ الشكل.

ب - بين أن H منتصف $[CG]$.

2 - نعتبر النقط المختلفة A و B و C

حدد و أنشئ مجموعة النقط M التي تحقق العلاقة $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$.

تعريف:

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C في المستوى هو مرجح هذه النقط معينة بنفس المعامل غير المنعدم .

بمعنى : G مركز ثقل النقط A و B و C يعني $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

تمرين تطبيقي

ABC و $A'B'C'$ مثلثان. G و G' هما مركزا ثقلهما على التوالي.

بين أن ABC و $A'B'C'$ لهما نفس مركز الثقل $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

إحداثيات مرجح نقطتين :

نشاط رقم 7

ليكن G مرجح النقط المتزنة (A, α) و (B, β) و (C, δ) .

1 - بين أن $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{OB} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{OC}$.

2 - علما ان $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $G(x_G, y_G)$ إستنتج x_G بدلالة كل من x_A و x_B و x_C و y_G بدلالة كل من y_A و y_B و y_C .

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح n نقطة ($2 \leq n \leq 4$).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمت.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

قاعدة:

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) لتكن النقطة $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ و $G(x_G, y_G)$.
إذا كان G هي مرجح النقطتين المتزنتين (A, α) و (B, β) و (C, δ) فإن: $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \delta x_C}{\alpha + \beta + \delta}$ و $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \delta y_C}{\alpha + \beta + \delta}$

تمرين تطبيقي

- 1 - نعتبر النقط المختلفة A و B و C ، بحيث $A(-1, 1)$ و $B(0, 2)$ و $C(2, -3)$.
و G مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 2)$ و $(B, -3)$ و H مرجح النقط المتزنة $(A, 2)$ و $(B, -3)$ و $(C, -1)$.
أ - حدد إحداثيات النقطة G ثم استنتج أن النقط A و B و G مستقيمية.
ب - حدد إحداثيات النقطة H ثم بين أن H منتصف $[CG]$.

III - مرجح أربع نقط متزنة

مبرهنة و تعريف:

- لتكن (A, α) و (B, β) و (C, δ) و (D, λ) أربع نقط متزنة من المستوى (P) بحيث $\alpha + \beta + \delta + \lambda \neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى (P) بحيث $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \delta \overrightarrow{GC} + \lambda \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة (A, α) و (B, β) و (C, δ) و (D, λ) .

ملاحظة:

G - مرجح النقط (A, α) و (B, β) و (C, δ) و (D, λ) تحقق العلاقة $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \delta + \lambda} \overrightarrow{AB} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \delta + \lambda} \overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \delta + \lambda} \overrightarrow{AD}$.
إذا كان $\alpha + \beta + \delta + \lambda = 0$ فإن (A, α) و (B, β) و (C, δ) و (D, λ) ليس لها مرجح.

نشاط رقم 8

- ليكن G مرجح النقط $(A, 1)$ و $(B, -3)$ و $(C, 1)$ و $(D, 2)$.
نعتبر M مرجح النقطتين $(A, 1)$ و $(B, -3)$.
و N مرجح النقطتين $(C, 1)$ و $(D, 2)$.

- 1- أرسم M و N .
- 2- بين أن G مرجح النقطتين $(M, -2)$ و $(N, 3)$.
- 3 - استنتج طريقة لإنشاء مرجح أربع نقط متزنة.

خاصية التجميعية

مرجح أربع نقط متزنة هو مرجح مرجحي كل نقطتين منهما معينين بمجموع معاملاتهما.

مبرهنة:

لتكن A و B و C و D أربع نقط مختلفة من المستوى (P) و α و β و δ و λ أعداد حقيقية بحيث $\alpha + \beta + \delta + \lambda \neq 0$.
النقطة G هي مرجح النقط المتزنة (A, α) و (B, β) و (C, δ) و (D, λ) إذا و فقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى (P) :

$$(\alpha + \beta + \delta + \lambda) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \delta \overrightarrow{MC} + \lambda \overrightarrow{MD}$$

تمرين تطبيقي

- 1 - $ABCD$ متوازي الأضلاع. بين أن مرجح النقط المتزنة $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 2)$ و $(D, 1)$ ينتمي إلى (AC) .
- 2 - $ABCD$ متوازي الأضلاع. بين أن مركزه O هو مركز ثقل النقط A و B و C و D .